UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

FORCE PONDÉROMOTRICE DANS UN MAGNÉTO-PLASMA FROID DUE A DES CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DE HAUTE-FRÉQUENCE.

PAR

ZOUHIER ABOU-ASSALEH

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

FACULTÉ DES ARTS ET DES SCIENCES

MÉMOIRE PRÉSENTÉ A LA FACULTÉ DES ÉTUDES SUPÉRIEURES

EN VUE DE L'OBTENTION DU GRADE DE

MAITRISE ES SCIENCES (M. Sc.)

FÉVRIER 1983

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

La force pondéromotrice a été déjà étudiée dans le cas d'une onde monochromatique, en relation avec des projets expérimentaux; il est pertinent de généraliser cette force pour le cas d'un ensemble d'ondes, possédant des fréquences différentes.

Nous sommes intéressés ici à déterminer la force pondéromotrice dans le cas où deux ondes électromagnétiques intéragissent avec un plasma afin d'enrichir l'un des aspects théoriques liés à l'expérience U.M.L.3. Ainsi nous mettrons en évidence la contribution de chacune des deux ondes, notamment dans le cas du mode de battement de ces deux ondes.

INTRODUCTION

La force pondéromotrice est la force agissant sur un diélectrique dans un champ électromagnétique non uniforme. Dans les plasmas, la force pondéromotrice décrit des phénomènes non linéaires de basses fréquences, induits par des champs à hautes fréquences.

Dans ce travail, on va déterminer la force pondéromotrice dans un plasma en présence d'un champ H.F. que l'on supposera composé de deux ondes de fréquences différentes. On va envisager le cas général d'un champ non stationnaire, i.e. où les amplitudes varient avec le temps mais de façon lente par rapport à la variation rapide du champ H.F.. Cet exposé se divise en quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, on va considérer les équations hydrodynamiques des deux fluides du plasma froid, avec les équations de Maxwell, en présence d'un champ électromagnétique H.F. non stationnaire. En prenant les valeurs moyennes de ces équations sur les oscillations rapides du champ H.F., on obtient deux types d'équations. Le premier représente les équations des variations rapides du mouvement, et le deuxième représente les équations des variations lentes du mouvement. Ensuite on va résoudre les équations de mouvement des variations rapides pour arriver à exprimer les variables rapides, fonctions des amplitudes des champs électriques.

Dans le deuxième chapitre on va trouver la force pondéromotrice en présence du champ H.F. (qui se compose de deux ondes), dans deux cas. On va d'abord étudier l'effet de chaque onde indépendamment l'une de l'autre, puis considérer l'effet des deux ondes ensembles, et en particulier l'effet de battement dû à la différence de fréquence des deux ondes.

Dans le troisième chapitre, nous présenterons les expressions du courant solénoïdal circulant dans le plasma, et du moment magnétique du plasma induit par des champs H.F.. Puis nous allons dériver les équations magnétohydrodynamiques du plasma selon le modèle à un seul fluide.

Dans le quatrième chapitre, on va calculer la force pondéromotrice dans le cas où les champs H.F. sont stationnaires, en nous limitant au cas particulier de deux ondes quasi-planes et perpendiculaires au champ magnétique statique.

CHAPITRE I

DESCRIPTION D'UN PLASMA FROID EN PRÉSENCE D'UN CHAMP H.F.

Dans ce chapitre, on va considérer un système à deux fluides (deux espèces de particules), qui sera décrit par les équations de conservation de la quantité de mouvement, et du nombre total de particules. Ces équations sont l'équivalent des équations de mouvement d'une particule en mécanique classique.

En présence d'un champ électromagnétique à haute fréquence appliqué à ce système, on peut séparer les variables de ces équations en deux parties, l'une à variation lente et l'autre à variation rapide. Ainsi, on obtiendra les équations d'évolution pour les deux échelles de temps.

Finalement, nous résoudrons les équations à variations rapides qui nous sont nécessaires pour les chapitres suivants.

I-1 Séparation des équations suivant deux échelles de temps

On considère un plasma froid dans un champ électromagnétique décrit par les équations à deux fluides [1]:

- Équation de conservation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{V}_\alpha}{\partial t} + (\underset{\sim}{V}_\alpha \cdot \nabla) \underset{\sim}{V}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \underset{\sim}{E} + \frac{1}{c} \underset{\sim}{V}_\alpha \times \underset{\sim}{B} \right\} , \tag{1}$$

- Équation de conservation du nombre total de particules:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}\,(n_\alpha \underset{\sim}{v}_\alpha) = 0 \tag{2}$$

et les équations de Maxwell:

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}(n_i \underset{\sim}{v}_i - n_e \underset{\sim}{v}_e), \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{B}}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\,\underset{\sim}{\mathcal{E}} = 4\pi e\,(n_i - n_e). \tag{5}$$

où n_α et $\underset{\sim}{v}_\alpha$ sont respectivement la densité et la vitesse des particules α, avec α = i, e (ions, électrons) et $e = e_1 > 0$.

On suppose que la partie H.F. du champ électromagnétique est de la forme:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(\underset{\sim}{r},t) &= \tfrac{1}{2}\left[\underset{\sim}{E}_1(\underset{\sim}{r},\lambda t)\exp(-i\omega_1 t) + \underset{\sim}{E}_2(\underset{\sim}{r},\lambda t)\exp(-i\omega_2 t) + C.C.\right] \\ \tilde{B}(\underset{\sim}{r},t) &= \tfrac{1}{2}\left[\underset{\sim}{B}_1(\underset{\sim}{r},\lambda t)\exp(-i\omega_1 t) + \underset{\sim}{B}_2(\underset{\sim}{r},\lambda t)\exp(-i\omega_2 t) + C.C.\right] \end{aligned} \tag{6}$$

où λ est un petit paramètre, qui indique la dépendance lente dans le temps; par contre, la dépendance en $\underset{\sim}{r}$ n'est pas nécessairement petite. Par exemple, dans le cas d'une onde quasi-plane on écrit que $\underset{\sim}{E}$ est proportionnel à exp. $(i\underset{\sim}{k}\underset{\sim}{r})$. Cependant, on supposera que la variation spatiale de $|\underset{\sim}{E}|^2$ est faible, ce qu'on représente par une dépendance sur $\lambda\underset{\sim}{r}$.

Toutes les fonctions peuvent être séparées en deux parties, l'une est oscillante et l'autre lentement variable dans le temps:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{V}_\alpha &= \langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \tilde{V}_\alpha \,, \\ n_\alpha &= \langle n_\alpha \rangle + \tilde{n}_\alpha \,, \\ \underset{\sim}{\mathcal{E}} &= \langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \tilde{\mathcal{E}} \,, \\ \underset{\sim}{B} &= \langle \underset{\sim}{B} \rangle + \tilde{B} \,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$\langle \quad \rangle$ représente la moyenne temporelle {3}:

$$\langle A(t) \rangle = \frac{1}{t_o} \int_t^{t+t_o} A(t')\,dt'$$

L'intervalle de temps t_o est grand comparé au temps τ des variations rapides, et petit comparé au temps t_s des variations lentes (voir appendice II).

Par définition de notre moyenne temporelle, nous obtenons:

$$\langle \tilde{V}_\alpha \rangle = \langle \tilde{n}_\alpha \rangle = \langle \tilde{\mathcal{E}} \rangle = \langle \tilde{B} \rangle = 0 \,, \tag{8}$$

et on utilise la notation:

$$\langle \underset{\sim}{B} \rangle = \underset{\sim}{B}^{o} \,. \tag{9}$$

Toutes les valeurs moyennes (incluant $\underset{\sim}{B}^{o}$) dépendent de $\lambda\underset{\sim}{r}$ et λt, i.e. leurs dérivées par rapport au temps et à l'espace sont petites (de l'ordre de λ), et les amplitudes des champs dans les équations (6) sont des quantités du premier ordre. Dans ce travail, nous allons nous limiter au second ordre en amplitude et au premier ordre en λ. En remplacant les relations (7) dans (1), (2), (3), (4) et (5) on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{V}_\alpha + (\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle\cdot\nabla)\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle + (\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle\cdot\nabla)\underset{\sim}{\tilde{V}}_\alpha + (\tilde{V}_\alpha\cdot\nabla)\tilde{V}_\alpha$$
$$= \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\Big\{\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \tilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle\times\langle \underset{\sim}{B}\rangle + \frac{1}{c}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle\times\tilde{B}$$
$$+ \tilde{V}_\alpha\times\langle \underset{\sim}{B}\rangle + \frac{1}{c}\tilde{V}_\alpha\times\tilde{B}\Big\}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{n}_\alpha + \mathrm{div}\big[\langle n_\alpha\rangle\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle + \langle n_\alpha\rangle\tilde{V}_\alpha +$$
$$+ \tilde{n}_\alpha\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle + \tilde{n}_\alpha\tilde{V}_\alpha\big] = 0 . \qquad (11)$$

$$\mathrm{rot}\langle \underset{\sim}{B}\rangle + \mathrm{rot}\,\tilde{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mathcal{E}}$$
$$+ \frac{4\pi e}{c}\Big\{\langle n_i\rangle\langle \underset{\sim}{V}_i\rangle + \langle n_i\rangle\tilde{V}_i +$$
$$+ \tilde{n}_i\langle \underset{\sim}{V}_i\rangle + \tilde{n}_i\tilde{V}_i - \langle n_e\rangle\langle \underset{\sim}{V}_e\rangle -$$
$$- \langle n_e\rangle\tilde{V}_e - \tilde{n}_e\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle - \tilde{n}_e\tilde{V}_e\Big\}, \qquad (12)$$

$$\mathrm{rot}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \mathrm{rot}\,\tilde{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{B}\rangle - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\tilde{B} . \qquad (13)$$

$$\mathrm{div}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \mathrm{div}\, \tilde{\mathcal{E}} = 4\pi e \left\{ \langle n_i \rangle + \tilde{n}_i - \langle n_e \rangle - \tilde{n}_e \right\}. \tag{14}$$

On prend les valeurs moyennes des équations (10) - (14) sur les oscillations H.F. et en considérant les équations (8) et (9) on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + (\langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle \cdot \nabla)\langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla)\tilde{V}_\alpha \rangle =$$

$$= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \frac{1}{c} \langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle \times \underset{\sim}{B}^o + \frac{1}{c} \langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle \right\}. \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha \rangle + \mathrm{div}\left[\langle n_\alpha \rangle \langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle \right] = 0\ ; \tag{16}$$

$$\mathrm{rot}\, \underset{\sim}{B}^o = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \frac{4\pi e}{c} \left\{ \langle n_i \rangle \langle \underset{\sim}{V}_i \rangle + \langle \tilde{n}_i \tilde{V}_i \rangle - \right.$$

$$\left. - \langle n_e \rangle \langle \underset{\sim}{V}_e \rangle - \langle \tilde{n}_e \tilde{V}_e \rangle \right\}, \tag{17}$$

$$\mathrm{rot}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{B}^o, \tag{18}$$

$$\mathrm{div}\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle = 4\pi e \left\{ \langle n_i \rangle - \langle n_e \rangle \right\}. \tag{19}$$

En soustrayant (15) de (10), (16) de (11), (17) de (12), (18) de (13) et (19) de (14) on arrive aux équations des variables rapides du premier ordre par rapport aux amplitudes:

$$\frac{\partial \tilde{V}_\alpha}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left\{ \tilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\tilde{V}_\alpha \times \underset{\sim}{B}^o \right\}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial \tilde{n}_\alpha}{\partial t} + \mathrm{div}(\langle n_\alpha \rangle \tilde{V}_\alpha) = 0\ , \tag{21}$$

$$rot\,\tilde{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}\left\{\langle n_i\rangle \tilde{V}_i - \langle n_e\rangle \tilde{V}_e\right\}, \tag{22}$$

$$rot\,\tilde{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t}, \tag{23}$$

$$div\,\tilde{\mathcal{E}} = 4\pi e\,(\tilde{n}_i - \tilde{n}_e). \tag{24}$$

où l'on a supposé que la vitesse non-pertubée est nulle.

Maintenant, soustrayons (20) de (10), (21) de (11), (22) de (12), (23) de (13) et (24) de (14), on obtient l'ensemble des équations décrivant le mouvement lent du plasma:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \frac{1}{c}\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle \times \underset{\sim}{B}^{\circ}\right\} - \langle(\tilde{V}_\alpha\cdot\nabla)\tilde{V}_\alpha\rangle + \frac{e_\alpha}{c\,m_\alpha}\langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B}\rangle, \tag{25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n_\alpha\rangle + div\left\{\langle n_\alpha\rangle\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle + \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha\rangle\right\} = 0, \tag{26}$$

$$rot\,\underset{\sim}{B}^{\circ} = \frac{1}{c}\frac{\partial\langle \mathcal{E}\rangle}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}\left\{\langle n_i\rangle\langle \underset{\sim}{V}_i\rangle - \langle n_e\rangle\langle \underset{\sim}{V}_e\rangle + \langle \tilde{n}_i \tilde{V}_i\rangle - \langle \tilde{n}_e \tilde{V}_e\rangle\right\}, \tag{27}$$

$$rot\,\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle = -\frac{1}{c}\frac{\partial \underset{\sim}{B}^{\circ}}{\partial t}, \tag{28}$$

$$div\,\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle = 4\pi e\,(\langle n_i\rangle - \langle n_e\rangle). \tag{29}$$

I- 2 Résolution des équations à variation rapide

Résolvons les équations (20), (21) et (23) au premier ordre en λ, pour les grandeurs $\tilde{v}_\alpha$, $\tilde{n}_\alpha$ et $\tilde{B}$ en fonction de l'amplitude du champ électrique.

Trouvons $\tilde{v}_\alpha$:

Soit $\underset{\sim}{B}^o$ suivant la direction de l'axe des z, de l'équation (20) on déduit:

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha x}}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\tilde{\mathcal{E}}_x + \frac{1}{c} B^o \tilde{V}_{\alpha y}\right], \tag{30}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha y}}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left[\tilde{\mathcal{E}}_y - \frac{1}{c} B^o \tilde{V}_{\alpha x}\right], \tag{31}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha z}}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\tilde{\mathcal{E}}_z . \tag{32}$$

l'équation (32) donne:

$$\tilde{V}_{\alpha z} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int \tilde{\mathcal{E}}_z\, dt = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{2}\Big[\int E_{1z}\exp(-i\omega_1 t)\,dt + \int E_{2z}\exp(-i\omega_2 t)\,dt + c.c.\Big]$$

de plus on a en intégrant par parties et en ne retenant que les termes en λ:

$$\int E_{1z}\exp(-i\omega_1 t)\,dt = \frac{i}{\omega_1}E_{1z}\exp(-i\omega_1 t) + \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial E_{1z}}{\partial t}\exp(-i\omega_1 t),$$

$$\int E_{2z}\exp(-i\omega_2 t)\,dt = \frac{i}{\omega_2}E_{2z}\exp(-i\omega_2 t) + \frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial E_{2z}}{\partial t}\exp(-i\omega_2 t).$$

donc:

$$\tilde{V}_{\alpha z} = \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left[\frac{i}{\omega_1}E_{1z} + \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial E_{1z}}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_1 t) + c.c. + \\ + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left[\frac{i}{\omega_2}E_{2z} + \frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial E_{2z}}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_2 t) + c.c. \tag{33}$$

Les équations (30) et (31) s'écrivent:

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha x}}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\tilde{\mathcal{E}}_x + \Omega_\alpha \tilde{V}_{\alpha y} \tag{34}$$

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha y}}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\tilde{\mathcal{E}}_y - \Omega_\alpha \tilde{V}_{\alpha y} \tag{35}$$

où $\underset{\sim}{\Omega}_\alpha = \dfrac{e_\alpha \underset{\sim}{B}^0}{m_\alpha c}$.

En posant que:

$$\tilde{V}_{\alpha\perp} = \tilde{V}_{\alpha x} + i\tilde{V}_{\alpha y} \tag{36}$$

on a: $$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha\perp}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha x}}{\partial t} + i\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha y}}{\partial t}$$

d'où on obtient avec (34) et (35):

$$\frac{\partial \tilde{V}_{\alpha\perp}}{\partial t} + i\Omega_\alpha \tilde{V}_{\alpha\perp} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(\tilde{\mathcal{E}}_x + i\tilde{\mathcal{E}}_y\right). \tag{37}$$

L'intégrale de cette équation est:

$$\tilde{V}_{\alpha\perp}\, e^{i\Omega_\alpha t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\int\left(\tilde{\mathcal{E}}_x + i\tilde{\mathcal{E}}_y\right) e^{i\Omega_\alpha t}\, dt. \tag{38}$$

Or, d'après l'équation (6):

$$\int \tilde{\mathcal{E}}_x e^{i\Omega_\alpha t} dt = \frac{1}{2}\int [E_{1x}\exp(-i\omega_1 t) + c.c.]\, e^{i\Omega_\alpha t} dt + \frac{1}{2}\int [E_{2x}\exp(-i\omega_2 t) + c.c.]\, e^{i\Omega_\alpha t} dt .$$

$$\int \tilde{\mathcal{E}}_y e^{i\Omega_\alpha t} dt = \frac{1}{2}\int [E_{1y}\exp(-i\omega_1 t) + c.c.]\, e^{i\Omega_\alpha t} dt + \frac{1}{2}\int [E_{2y}\exp(-i\omega_2 t) + c.c.]\, e^{i\Omega_\alpha t} dt ,$$

de plus, en intégrant par parties et en ne retenant que les termes en λ, l'intégrale suivante donne:

$$\int E_{\ell x_j}\exp(-i\omega_\ell t)\, e^{i\Omega_\alpha t} dt = \frac{i}{(\omega_\ell - \Omega_\alpha)} E_{\ell x_j}\exp[i(\Omega_\alpha - \omega_\ell)t] + \frac{1}{(\omega_\ell - \Omega_\alpha)^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}E_{\ell x_j}\right)\exp[i(\Omega_\alpha - \omega_\ell)t] .$$

$$\int E^*_{\ell x_j}\exp(+i\omega_\ell t)\, e^{i\Omega_\alpha t} dt = \frac{-i}{(\Omega_\alpha + \omega_\ell)} E^*_{\ell x_j}\exp[i(\Omega_\alpha + \omega_\ell)t] + \frac{1}{(\omega_\ell + \Omega_\alpha)^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}E^*_{\ell x_j}\right)\exp[i(\Omega_\alpha + \omega_\ell)t] .$$

où = 1,2 et j = 1,2 et $x_1 = x$ et $x_2 = y$, et $\omega_\ell \neq \Omega_\alpha$

Finalement d'après ces relations, l'équation (38) s'écrit:

$$\tilde{V}_{\alpha\perp} = \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left\{\frac{i}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)}E_{1x} + \frac{1}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_{1x}}{\partial t} - \frac{1}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)}E_{1y} + \frac{i}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_{1y}}{\partial t}\right\} e^{-i\omega_1 t} + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left\{\frac{-i}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)}E^*_{1x} + \frac{1}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E^*_{1x}}{\partial t} + \frac{1}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)}E^*_{1y} + \frac{i}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E^*_{1y}}{\partial t}\right\} e^{+i\omega_1 t} + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha}\left\{\frac{i}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)}E_{2x} + \right.$$

$$+ \frac{1}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E_{2x}}{\partial t} - \frac{1}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)} E_{2y} + \frac{i}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E_{2y}}{\partial t} \Big\} e^{-i\omega_2 t} +$$

$$+ \frac{e_\alpha}{2m_\alpha} \Big\{ \frac{-i}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)} E^*_{2x} + \frac{1}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E^*_{2x}}{\partial t} + \frac{1}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)} E^*_{2y} +$$

$$+ \frac{i}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E^*_{2y}}{\partial t} \Big\} e^{+i\omega_2 t} .$$

Si on prend:

$$[\quad]_\perp = [\quad]_x + i\,[\quad]_y \tag{39}$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\alpha\perp} = {} & \frac{e_\alpha}{2m_\alpha} \Big\{ \frac{i}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)} E_{1\perp} + \frac{1}{(\omega_1 - \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E_{1\perp}}{\partial t} \Big\} e^{-i\omega_1 t} + \\ & + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha} \Big\{ \frac{-i}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)} E^*_{1\perp} + \frac{1}{(\omega_1 + \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E^*_{1\perp}}{\partial t} \Big\} e^{+i\omega_1 t} + \\ & + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha} \Big\{ \frac{i}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)} E_{2\perp} + \frac{1}{(\omega_2 - \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E_{2\perp}}{\partial t} \Big\} e^{-i\omega_2 t} + \\ & + \frac{e_\alpha}{2m_\alpha} \Big\{ \frac{-i}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)} E^*_{2\perp} + \frac{1}{(\omega_2 + \Omega_\alpha)^2} \frac{\partial E^*_{2\perp}}{\partial t} \Big\} e^{+i\omega_2 t} . \end{aligned} \tag{40}$$

L'appendice I donne les relations suivantes:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\omega_1} E_{1z} = \frac{4\pi}{\omega^2_{p_\alpha}} \left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \right]_z \; ; \; \frac{i}{\omega_2} E_{2z} = \frac{4\pi}{\omega^2_{p_\alpha}} \left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2 \right]_z , \\ & \frac{-i}{\omega_1} E^*_{1z} = \frac{4\pi}{\omega^2_{p_\alpha}} \left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}^*_1 \right]_z \; ; \; \frac{-i}{\omega_2} E^*_{2z} = \frac{4\pi}{\omega^2_{p_\alpha}} \left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2) \underset{\sim}{E}^*_2 \right]_z . \end{aligned} \tag{41}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{i}{(\omega_1-\Omega_\alpha)}E_{1\perp}=\frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]_\perp ; \frac{i}{(\omega_2-\Omega_\alpha)}E_{2\perp}=\frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2\right]_\perp ,\\
&\frac{-i}{(\omega_1-\Omega_\alpha)}E^*_{1\perp}=\frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}^*_\alpha\underset{\sim}{E}^*_1\right]_\perp ; \frac{-i}{(\omega_2-\Omega_\alpha)}E_{2\perp}=\frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\right] .
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{(\omega_1-\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_{1\perp}}{\partial t}=\frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial\underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]_\perp ,\\
&\frac{1}{(\omega_2-\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_{2\perp}}{\partial t}=\frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial\underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]_\perp ,\\
&\frac{1}{(\omega_1+\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E^*_{1\perp}}{\partial t}=\frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial\underset{\sim}{E}^*_1}{\partial t}\right]_\perp ;\\
&\frac{1}{(\omega_2+\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E^*_{2\perp}}{\partial t}=\frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial\underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\right]_\perp .
\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial E_{1z}}{\partial t}=\frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial\underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]_z ,\\
&\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial E_{2z}}{\partial t}=\frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial\underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]_z ,\\
&\frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial E^*_{1z}}{\partial t}=\frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial\underset{\sim}{E}^*_1}{\partial t}\right]_z .\\
&\frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial E^*_{2z}}{\partial t}=\frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial\underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\right]_z .
\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

où on a utilisé les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\hat{\sigma}_\alpha\underset{\sim}{E}\right]_\perp\equiv\left[\hat{\sigma}_\alpha\underset{\sim}{E}\right]_x+i\left[\hat{\sigma}_\alpha\underset{\sim}{E}\right]_y ,\\
&\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underset{\sim}{E}}{\partial t}\right]_\perp\equiv\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underset{\sim}{E}}{\partial t}\right]_x+i\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underset{\sim}{E}}{\partial t}\right]_y .
\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ici $\omega_{p_\alpha}^2 = \frac{4\pi \langle n_\alpha \rangle e^2}{m_\alpha}$, et $\hat{\sigma}_\alpha(\omega)$ est la contribution de la conductivité pour chaque type de particules; le tenseur diélectrique peut s'écrire de la façon suivante:

$$\hat{\epsilon}(\omega) = \hat{I} + \frac{4\pi i}{\omega}\left(\hat{\sigma}_e(\omega) + \hat{\sigma}_i(\omega)\right), \tag{46}$$

et $\hat{I} = (\delta_{ij})$ est le tenseur unitaire.

Dans ce système de coordonnées avec $\underset{\sim}{B}^0$ suivant la direction des z, $\hat{\sigma}_\alpha(\omega)$ a la forme:

$$\hat{\sigma}_\alpha(\omega) = i\frac{\omega}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & i\frac{\Omega_\alpha}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & 0 \\ -i\frac{\Omega_\alpha}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \tag{47}$$

Des équations (33), (41) et (44), on obtient:

$$\begin{aligned}\tilde{V}_{\alpha z} = {} & \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left\{\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]_z + i\left[\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]_z\right\} e^{-i\omega_1 t} + c.c. \\ & + \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left\{\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2\right]_z + i\left[\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]_z\right\} e^{-i\omega_2 t} + c.c.\end{aligned} \tag{48}$$

des (40), (42), (43):

$$\tilde{V}_{\alpha\perp} = \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left\{\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]_\perp + i\left[\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]_\perp\right\} e^{-i\omega_1 t} + c.c. +$$

$$+ \frac{2\pi}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left\{\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2\right]_\perp + i\left[\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]_\perp\right\} e^{-i\omega_2 t} + c.c. \tag{49}$$

et finalement, de (48) et (49):

$$\tilde{V}_\alpha = \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + i\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_1 t) + c.c. +$$

$$+ \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 + i\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_2 t) + C.C. \tag{50}$$

<u>Trouvons $\tilde{n}_\alpha$:</u>

De l'équation (21), on a:

$$\frac{\partial \hat{n}_\alpha}{\partial t} + n_o \, div\, \tilde{V}_\alpha = 0 \quad , \quad (n_o \equiv \langle n_\alpha \rangle)$$

d'où $$\tilde{n}_\alpha = -n_o \int div\, \tilde{V}_\alpha \, dt$$

Or on peut écrire l'équation (50) sous la forme suivante:

$$\tilde{V}_\alpha = \frac{1}{2}\left\{\underset{\sim}{u}_1 \exp(-i\omega_1 t) + c.c.\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\underset{\sim}{u}_2 \exp(-i\omega_2 t) + c.c.\right\}. \tag{51}$$

Cette équation permet de calculer:

$$\int \tilde{v}_\alpha dt = \frac{1}{2}\left\{ \int \underset{\sim}{u}_1 \exp(-i\omega_1 t)\, dt + c.c.\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{ \int \underset{\sim}{u}_2 \exp(-i\omega_2 t) dt + c.c.\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{\omega_1}\underset{\sim}{u}_1 + \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial \underset{\sim}{u}_1}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_1 t) + c.c.\right\} + \\ + \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{\omega_2}\underset{\sim}{u}_2 + \frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial \underset{\sim}{u}_2}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_2 t) + c.c.\right\}.$$

en considérant que $\dfrac{\partial^2 \underset{\sim}{u}_1}{\partial t^2} \approx \dfrac{\partial^2 \underset{\sim}{u}_2}{\partial t^2} \approx 0 \; ; \; (\alpha\, \lambda^2)$.

donc

$$\tilde{n}_\alpha = -\frac{i n_0}{2\omega_1}\, div\left(\underset{\sim}{u}_1 - \frac{i}{\omega_1}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{u}_1\right)\exp(-i\omega_1 t) + c.c. - \\ - \frac{i n_0}{2\omega_2}\, div\left(\underset{\sim}{u}_2 - \frac{i}{\omega_2}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{u}_2\right)\exp(-i\omega_2 t) + c.c. \qquad (52)$$

Des équations (50) et (51), on a:

$$\frac{1}{2}\,\underset{\sim}{u}_1 \equiv \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + i\,\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right],$$

$$\frac{1}{2}\,\underset{\sim}{u}_2 \equiv \frac{2\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 + i\,\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right].$$

ce qui donne:

$$\left(\underset{\sim}{u}_1 - \frac{i}{\omega_1}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{u}_1\right) = \frac{4\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + i\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right].$$

$$\left(\underset{\sim}{u}_2 - \frac{i}{\omega_2}\frac{\partial}{\partial t}\underset{\sim}{u}_2\right) = \frac{4\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 + i\omega_2 \frac{\partial}{\partial \omega_2}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\omega_2}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right].$$

la combinaison de ces deux équations et de (52) donne:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_\alpha = &\frac{-i}{2e_\alpha\omega_1}\,\mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + i\omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_1 t) + c.c.\\ &-\frac{i}{2e_\alpha\omega_2}\,\mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 + i\omega_2\frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\omega_2}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_2 t) + c.c.\end{aligned} \tag{53}$$

<u>Trouvons $\tilde{B}$:</u>

Rappelons l'équation (23):

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}\,\tilde{\mathcal{E}}$$

d'où

$$\tilde{B} = -c\,\mathrm{rot}\int \mathcal{E}\,dt$$

d'après (6) on a:

$$\int \tilde{\mathcal{E}}\,dt = \frac{1}{2}\int \underset{\sim}{E}_1 \exp(-i\omega_1 t)\,dt + c.c. + $$

$$+ \frac{1}{2}\int \underset{\sim}{E}_2 \exp(-i\omega_2 t)\,dt + c.c.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{i}{\omega_1}\underset{\sim}{E}_1 + \frac{1}{\omega_1^2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_1 t) + c.c. +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{i}{\omega_2}\underset{\sim}{E}_2 + \frac{1}{\omega_2^2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right]\exp(-i\omega_2 t) + c.c.$$

d'où:

$$\widetilde{B} = \frac{-ic}{2\omega_1}\,\mathrm{rot}\left(\underset{\sim}{E}_1 - \frac{i}{\omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right)\exp(-i\omega_1 t) + c.c. -$$

$$- \frac{ic}{2\omega_2}\,\mathrm{rot}\left(\underset{\sim}{E}_2 - \frac{i}{\omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t}\right)\exp(-i\omega_2 t) + c.c. \tag{54}$$

On remarque que, dans les résultats obtenus pour $\widetilde{V}_\alpha$, $\widetilde{n}_\alpha$ et $\widetilde{B}$, équations (50), (53) et (54), il n'y a pas de termes mixtes, ce qui est en plein accord avec le caractère linéaire des équations de départ (20) - (22).

CHAPITRE II

LA FORCE PONDÉROMOTRICE

Dans le modèle de magnétohydrodynamique à deux fluides, la force pondéromotrice qui agit sur une particule chargée α (ion, électron) en présence d'un champ H.F. correspond à la partie non-linéaire de l'équation du mouvement lent de cette particule. V.I. Karpman et A.G. Shagalov ont étudié cette force en présence d'un champ H.F. de fréquence ω et d'amplitudde de champ électrique $\underset{\sim}{E}$ [1]. A présent, nous allons calculer cette force d'origine non-linéaire dans le cas de deux ondes de caractéristiques ω_1, $\underset{\sim}{E}_1$ et ω_2, $\underset{\sim}{E}_2$.

La partie la plus importante, qui résulte de l'effet de ces deux ondes ensembles, est celle qui exprime les effets de battement, qui a d'ailleurs le plus d'intérêt pour les travaux expérimentaux, surtout pour l'expérience "U.M.L.3.".

Ainsi on trouvera la force pondéromotrice, tout en considérant les effets de battement qui dépendent du terme $\exp\cdot\left[\pm i(w_1 - w_2)t\right]$, et on négligera par contre les termes qui dépendent de $\exp\cdot\left[\pm i2w_{1,2}\ t\right]$ et de $\exp\cdot\left[\pm i(w_1 + w_2)t\right]$, car leurs valeurs moyennes sont nulles d'après nos hypothèses de départ (voir appendice II).

Pour simplifier notre travail, on va calculer la force pondéromotrice dans deux cas. En premier lieu on ne tiendra pas compte des termes qui dépendent de exp. $[\pm i\ (\omega_1 - \omega_2)\ t]$, c'est-à-dire, on étudiera le cas de deux fréquences séparées. Ensuite, on tiendra compte de ces termes.

II-1 Deux fréquences séparées:

Considérons les équations des quantités fonctions quadratiques des amplitudes.

Trouvons d'abord $\langle \tilde{n}_\alpha\ \tilde{v}_\alpha \rangle$(voir appendice II).

Des équations (50) et (53), on obtient:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2} \Big\{ & \frac{i}{\omega_1} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underline{E}_1\, div \left[\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \underline{E}_1^* \right] + C.C. \\
& - \frac{1}{\omega_1} \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underline{E}_1^*}{\partial t}\, div \left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underline{E}_1 \right] + C.C. \\
& + \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \underline{E}_1^*\, div \left[\frac{\partial}{\partial \omega_1} \left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1} \right) \frac{\partial \underline{E}_1}{\partial t} \right] + C.C. \Big\} + \\
+ \frac{\pi}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2} \Big\{ & \frac{i}{\omega_2} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underline{E}_2\, div \left[\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underline{E}_2^* \right] + C.C. \\
& - \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2} \frac{\partial \underline{E}_2^*}{\partial t}\, div \left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underline{E}_2 \right] + C.C. \\
& + \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underline{E}_2^*\, div \left[\frac{\partial}{\partial \omega_2} \left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\omega_2} \right) \frac{\partial \underline{E}_2}{\partial t} \right] + C.C. \Big\}
\end{aligned} \qquad (55)$$

où on a négligé les termes d'ordre λ^2 et les termes qui dépendent de $\langle \exp[\pm i(w_1 - w_2)t] \rangle$.

En utilisant la relation suivante:

$$\mathrm{rot}\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E} \times \hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right] = \hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\, \mathrm{div}\, \hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^* - \hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\, \mathrm{div}\, \hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}$$
$$+ (\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^* \cdot \nabla)\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E} - (\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E} \cdot \nabla)\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*. \tag{56}$$

dans l'équation (55), on trouve:

$$\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle = \frac{\underset{\sim}{j}_{1\alpha}}{e_\alpha} + \frac{\underset{\sim}{j}_{2\alpha}}{e_\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}. \tag{57}$$

où: $$\underset{\sim}{j}_{1,2\,\alpha} = \frac{i\pi e_\alpha}{m_\alpha \omega_{1,2}}\, \mathrm{rot}\, \omega_{p_\alpha}^{-2}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}_{1,2} \times \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}^*_{1,2}\right], \tag{58}$$

$$\underset{\sim}{\Gamma}_{1,2\alpha} = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_{1,2}}\Big\{ i(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}_{1,2}\cdot\nabla)\,\omega_{p_\alpha}^{-2}\,\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}^*_{1,2}$$
$$+ \frac{\omega_{1,2}}{\omega_{p_\alpha}^2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}_{1,2}\, \mathrm{div}\, \frac{\partial}{\partial \omega_{1,2}}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_{1,2})}{\omega_{1,2}}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_{1,2}}{\partial t}$$
$$- \frac{1}{\omega_{p_\alpha}^2}\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_{1,2})}{\partial \omega_{1,2}}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_{1,2}}{\partial t}\, \mathrm{div}\, \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_{1,2})\underset{\sim}{E}^*_{1,2} + \mathrm{c.c.}\Big\}. \tag{59}$$

Ensuite, en utilisant (57), on peut écrire (26) et (27) sous les formes suivantes:

$$\frac{\partial\langle n_\alpha\rangle}{\partial t} + \mathrm{div}\left\{\langle n_\alpha\rangle\langle \underset{\sim}{V}_\alpha\rangle + \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}\right\} = 0, \tag{60}$$

où nous avons utilisé le fait que $div\, \underset{\sim}{j}_{1\alpha} = 0$ et $div\, \underset{\sim}{j}_{2\alpha} = 0$.

$$rot\, \underset{\sim}{B}^0 = \frac{1}{c}\frac{\partial \langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i} \right) + \\ + \frac{4\pi e}{c}\left\{ \langle n_i \rangle \langle \underset{\sim}{v}_i \rangle - \langle n_e \rangle \langle \underset{\sim}{v}_e \rangle + \right. \\ \left. + \underset{\sim}{\Gamma}_{1i} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2i} - \underset{\sim}{\Gamma}_{1e} - \underset{\sim}{\Gamma}_{2e} \right\}. \tag{61}$$

De l'équation (60), on définit la vitesse renormalisée $\underset{\sim}{u}_\alpha$ comme suit:

$$\underset{\sim}{u}_\alpha = \langle \underset{\sim}{v}_\alpha \rangle + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle}. \tag{62}$$

Combinons cette équation avec l'équation (25). On obtient:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{u}_\alpha}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left\{ \langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \frac{1}{c}\underset{\sim}{u}_\alpha \times \underset{\sim}{B}^0 \right\} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{c}\left(\frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} \right) \times \underset{\sim}{B}^0 \\ - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} \right) - \langle (\tilde{v}_\alpha \cdot \nabla)\tilde{v}_\alpha \rangle + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\langle \tilde{v}_\alpha \times \tilde{B} \rangle ; \tag{63}$$

ou

$$m_\alpha \langle n_\alpha \rangle \frac{\partial \underset{\sim}{u}_\alpha}{\partial t} = e_\alpha \langle n_\alpha \rangle \left\{ \langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle + \frac{1}{c}\underset{\sim}{u}_\alpha \times \underset{\sim}{B}^0 \right\} + \underset{\sim}{f}_\alpha , \tag{64}$$

où $$\underset{\sim}{f}_\alpha = - m_\alpha \langle n_\alpha \rangle \langle (\hat{v}_\alpha \cdot \nabla)\hat{v}_\alpha \rangle + \frac{e_\alpha \langle n_\alpha \rangle}{c}\langle \hat{v}_\alpha \times \hat{B} \rangle \\ - \frac{e_\alpha}{c}\left(\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha} \right) \times \underset{\sim}{B}^0 + m_\alpha \left(\frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\partial t} \right). \tag{65}$$

Cette équation représente la force pondéromotrice agissant sur les particules α. Le premier terme est la moyenne de la partie non linéaire à variation rapide. Le second terme représente la moyenne sur l'interaction entre le courant rapide et l'induction magnétique à haute fréquence. Le troisième terme représente l'interaction entre le courant de dérive et le champ $\underset{\sim}{B}^{o}$. Le quatrième terme représente les termes non linéaires de l'accélération dépendant de la vitesse normalisée $\underset{\sim}{u}_{\alpha}$.

Si on met (62) dans (60) et (61), on trouve:

$$\frac{\partial \langle n_\alpha \rangle}{\partial t} + div\left(\langle n_\alpha \rangle \underset{\sim}{u}_\alpha\right) = 0 \quad , \tag{66}$$

$$rot\ \underset{\sim}{B}^{o} = \frac{1}{c}\frac{\partial \langle \underset{\sim}{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i}\right) + \frac{4\pi e}{c}\left(\langle n_i \rangle \underset{\sim}{u}_i - \langle n_e \rangle \underset{\sim}{u}_e\right). \tag{67}$$

Les équations (64), (66) et (67) sont les équations de mouvement lent du plasma.

Maintenant utilisons les équations (50), (53), (54) et (59) pour transformer la force pondéromotrice (65). Pour l'instant, en ne tenant pas compte des termes exp $[\pm i(\omega_1 - w_2)t]$, on trouve:

$$\begin{aligned}\left\langle \left(\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla\right)\tilde{V}_\alpha \right\rangle = \frac{1}{4\langle n_\alpha \rangle^2 e_\alpha}\Big\{ & \left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1^* - i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla\right) \\ & \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1^*}{\partial t} + i\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1^* + C.C.\Big\} + \\ + \frac{1}{4\langle n_\alpha \rangle^2 e_\alpha}\Big\{ & \left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2^* - i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 \cdot \nabla\right) \\ & \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} + i\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2^* + C.C.\Big\}.\end{aligned} \tag{68}$$

$$\langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle = \frac{-c}{4\langle n_\alpha \rangle e_\alpha} \Big\{ -\frac{i}{\omega_1} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1^* + \omega_1^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \big[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1^* \big] + \frac{\partial}{\partial \omega_1} \Big(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1} \Big) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1^* + C.C. \Big\} -$$

$$- \frac{c}{4\langle n_\alpha \rangle e_\alpha} \Big\{ -\frac{i}{\omega_2} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_2^* + \omega_2^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \big[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_2^* \big] + \frac{\partial}{\partial \omega_2} \Big(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\omega_2} \Big) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t} \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_2^* + C.C. \Big\}, \tag{69}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\partial t} = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_1} \Big\{ i \Big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \cdot \nabla \Big) \omega_{p_\alpha}^{-2} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1^* + i \big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla \big) \omega_{p_\alpha}^{-2} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1^*}{\partial t} + C.C. \Big\}, \tag{70}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\partial t} = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_2} \Big\{ i \Big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2}{\partial t} \cdot \nabla \Big) \omega_{p_\alpha}^{-2} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* + i \big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2 \cdot \nabla \big) \omega_{p_\alpha}^{-2} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} + C.C. \Big\}. \tag{71}$$

Insérons les équations (68), (69), (70) et (71) dans (65), on aboutit à:

$$\underset{\sim}{f}_\alpha = -\frac{m_\alpha}{\langle n_\alpha \rangle e_\alpha^2} \Big\{ \big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla \big) \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1^* - i \big(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla \big) \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1^*}{\partial t} + i \Big(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \cdot \nabla \Big) \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1^* + C.C. \Big\} - \frac{1}{4} \Big\{ -\frac{i}{\omega_1} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1^* +$$

$$
\begin{aligned}
&+ \omega_1^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\mathbf{E}_1 \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1^*\right] + \frac{\partial}{\partial \omega_1}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1}\right)\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_1^* + c.c.\Big\} - \\
&- \frac{e_\alpha}{c}\frac{\pi}{m_\alpha \omega_1}\omega_{p_\alpha}^{-2}\Big\{ i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\mathbf{E}_1^* + \omega_1 \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\mathbf{E}_1\,\mathrm{div}\left[\frac{\partial}{\partial \omega_1}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)}{\omega_1}\right)\frac{\partial \mathbf{E}_1^*}{\partial t}\right] \\
&- \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t}\,\mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\mathbf{E}_1^*\right] + c.c.\Big\} \times \mathbf{B}^0 + \omega_{p_\alpha}^{-2}\frac{\pi}{\omega_1}\Big\{ i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial t} \cdot \nabla\right) \\
&\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\mathbf{E}_1^* + i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\mathbf{E}_1 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_1)\frac{\partial \mathbf{E}_1^*}{\partial t} + c.c.\Big\} - \frac{m_\alpha}{\langle n_\alpha \rangle e_\alpha^2}\Big\{\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \cdot \nabla\right) \\
&\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\mathbf{E}_2^* - i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \cdot \nabla\right)\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial t} + i\left(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\mathbf{E}_2^* \\
&+ c.c.\Big\} - \frac{1}{4}\Big\{ -\frac{i}{\omega_2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_2^* + \omega_2^{-2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_2^*\right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial \omega_2}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\omega_2}\right)\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \times \mathrm{rot}\,\mathbf{E}_2^* + c.c.\Big\} - \frac{e_\alpha}{c}\frac{\pi}{m_\alpha \omega_2}\omega_{p_\alpha}^{-2}\Big\{ i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \cdot \nabla\right) \\
&\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\mathbf{E}_2^* + \omega_2 \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2\,\mathrm{div}\Big[\frac{\partial}{\partial \omega_2}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\omega_2}\right)\frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial t} - \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \cdot \\
&\mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\mathbf{E}_2^*\right] + c.c.\Big\} \times \mathbf{B}^0 + \omega_{p_\alpha}^{-2}\frac{\pi}{\omega_1}\Big\{ i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial t} \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\mathbf{E}_2^* \\
&+ i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\mathbf{E}_2 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\frac{\partial \mathbf{E}_2^*}{\partial t} + c.c.\Big\}. \qquad (72)
\end{aligned}
$$

Donc, dans cette approche, on trouve naturellement que la force pondéromotrice due à deux fréquences est la somme des forces pondéromotrices dues à chacune des fréquences. Il n'y a pas de termes supplémentaires dus aux battements qui n'ont pas été considérés pour l'instant.

II-2 Effets des fréquences de battements

Ici on va calculer la force pondéromotrice en considérant en plus les termes qui dépendent de $[\exp \pm i(w_1 - w_2)t]$.

Donc, des équations (50) et (53), on trouve:

$$\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle = \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{I} + \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} \tag{73}$$

où $\langle \tilde{n}_\alpha \ \tilde{v}_\alpha \rangle_I$ à la même valeur que $\langle \tilde{n}_\alpha \ \tilde{v}_\alpha \rangle$ du premier cas, (équation 57):

$$\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{I} = \frac{\underset{\sim}{j}_{1\alpha}}{e_\alpha} + \frac{\underset{\sim}{j}_{2\alpha}}{e_\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha} \tag{74}$$

et $\langle n_\alpha \ v_\alpha \rangle_{II}$ est le nouveau terme qui dépend de $\langle \exp + i(w_1 - w_2)t \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_{p\alpha}^2} \Big\{ & -\frac{i}{\omega_1} \operatorname{div} [\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1] \cdot \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* - \\
& - \frac{1}{\omega_1} \operatorname{div} [\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1] \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} + \operatorname{div} \Big[\frac{\partial}{\partial \omega_1} \Big(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1} \Big) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \Big] \cdot \\
& \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* + \frac{i}{\omega_2} \operatorname{div} [\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^*] \cdot \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \\
& - \frac{1}{\omega_2} \operatorname{div} [\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^*] \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \\
& + \operatorname{div} \Big[\frac{\partial}{\partial \omega_2} \Big(\frac{\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\omega_2} \Big) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} \Big] \cdot \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \Big\} \cdot \\
& \cdot \langle \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \rangle + c.c.
\end{aligned} \tag{75}$$

En utilisant la relation (73) comme on a fait dans le premier cas, on trouve que les équations (60) et (61) s'écrivent:

$$\frac{\partial \langle n_\alpha \rangle}{\partial t} + div \left\{ \langle n_\alpha \rangle \langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha} + \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} \right\} = 0 \tag{76}$$

$$\begin{aligned} rot\, \underset{\sim}{B}^o = {} & \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \underset{\sim}{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i} \right) \\ & + \frac{4\pi e}{c} \left\{ \langle n_i \rangle \langle \underset{\sim}{V}_i \rangle - \langle n_e \rangle \langle \underset{\sim}{V}_e \rangle + \underset{\sim}{\Gamma}_{1i} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2i} \right. \\ & \left. - \underset{\sim}{\Gamma}_{1e} - \underset{\sim}{\Gamma}_{2e} + \langle \tilde{n}_i \tilde{V}_i \rangle_{II} - \langle \tilde{n}_e \tilde{V}_e \rangle_{II} \right\} . \end{aligned} \tag{77}$$

et que, d'après (76), la vitesse renormalisée vaut:

$$\underset{\sim}{U}_\alpha = \langle \underset{\sim}{V}_\alpha \rangle + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} + \frac{\underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\langle n_\alpha \rangle} + \frac{\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II}}{\langle n_\alpha \rangle} \tag{78}$$

Les équations (76), (77) et (78) permettent de calculer:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \langle n_\alpha \rangle}{\partial t} + div \left(\langle n_\alpha \rangle \underset{\sim}{U}_\alpha \right) = 0 , \\ & rot\, \underset{\sim}{B}^o = \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \underset{\sim}{E} \rangle}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i} \right) \\ & \qquad - \frac{4\pi e}{c} \left(\langle n_i \rangle \underset{\sim}{U}_i - \langle n_e \rangle \underset{\sim}{U}_e \right) . \end{aligned} \right\} \tag{79}$$

Des équations (26) et (78), on trouve:

$$m_\alpha \langle n_\alpha \rangle \frac{\partial \underset{\sim}{U}_\alpha}{\partial t} = e_\alpha \langle n_\alpha \rangle \left\{ \langle \underset{\sim}{E} \rangle + \frac{1}{c} \underset{\sim}{U}_\alpha \times \underset{\sim}{B}^0 \right\} + \underset{\sim}{F}_\alpha \tag{80}$$

où:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{F}_\alpha = & - m_\alpha \langle n_\alpha \rangle \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle + \frac{e_\alpha \langle n_\alpha \rangle}{c} \langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle \\ & - \frac{e_\alpha}{c} \left(\underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha} \right) \times \underset{\sim}{B}^0 + m_\alpha \left(\frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha}}{\partial t} \right) \\ & + m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} - \frac{e_\alpha}{c} \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} \times \underset{\sim}{B}^0 . \end{aligned} \tag{81}$$

est la force pondéromotrice due à chacune des deux ondes et au battement entre elles.

On calcule maintenant les termes dans l'équation (81). Grâce à (50):

$$\langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle = \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle_I + \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} \tag{82}$$

où $\langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle_I$ est le même que $\langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle$ dans l'équation (68), et

$$\begin{aligned} \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} = & \frac{1}{4 \langle n_\alpha \rangle^2 e_\alpha^2} \Big\{ (\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla) \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* - i (\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla) \\ & \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} + i \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \cdot \nabla \right) \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* \\ & + (\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* \cdot \nabla) \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 + i (\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* \cdot \nabla) \cdot \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \\ & - i \left(\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} \cdot \nabla \right) \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \Big\} \cdot \\ & \cdot \langle \exp[-i(\omega_1 - \omega_2) t] \rangle + c.c. \end{aligned} \tag{83}$$

Des équations (50) et (54), on obtient:

$$\langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle = \langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle_I + \langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle_{II} \tag{84}$$

où $\langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle_I$ est donné dans l'équation (69), et

$$\langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle_{II} = \frac{ic}{4\langle n_\alpha \rangle e_\alpha} \Big\{ \frac{1}{\omega_2} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_2^* + \frac{i}{\omega_2^2} \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t}$$
$$+ \frac{i}{\omega_2} \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_2^* - \frac{1}{\omega_1} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1$$
$$+ \frac{i}{\omega_1^2} \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* \times \mathrm{rot} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} + \frac{i}{\omega_1} \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{i\, \omega_2} \frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} \times \mathrm{rot}\, \underset{\sim}{E}_1 \Big\} \cdot$$
$$\cdot \langle \exp[-i(\omega_1 - \omega_2)t] \rangle + \text{c. c.} \tag{85}$$

En utilisant (82) et (84), on peut écrire la force pondéromotrice (81) sous la forme:

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = \underset{\sim}{f}_\alpha + m_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} - \frac{e_\alpha}{c} \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} \times \underset{\sim}{B}^\circ$$
$$- m_\alpha \langle n_\alpha \rangle \langle (\tilde{V}_\alpha \cdot \nabla) \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} + \frac{e_\alpha \langle n_\alpha \rangle}{c} \langle \tilde{V}_\alpha \times \tilde{B} \rangle_{II} \tag{86}$$

où f_α est donné par (65).

De l'équation (75), on trouve:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \tilde{n}_\alpha \tilde{V}_\alpha \rangle_{II} = \frac{\pi}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2} \Big\{ -\frac{i}{\omega_1} \mathrm{div} \left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1) \frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \right] \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2) \underset{\sim}{E}_2^* -$$

$$- \frac{i}{\omega_1} div\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t} + \frac{i}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\right]\cdot$$

$$\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + \frac{i}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\right]\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\Big\}\cdot$$

$$\cdot\left\langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\right\rangle + c.c. \tag{87}$$

Avec les équations (75), (83), (85) et (87), (86) s'écrit:

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = \underset{\sim}{f}_\alpha + \frac{\pi}{\omega^2_{p_\alpha}}\Big\{-\frac{i}{\omega_1} div\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]\cdot\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2 - \frac{i}{\omega_1} div\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]\cdot$$

$$\cdot\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t} + \frac{i}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\right]\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 + \frac{i}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\right]\cdot$$

$$\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\Big\}\cdot\left\langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\right\rangle + c.c. - \frac{e_\alpha}{c}\frac{\pi}{m_\alpha\omega^2_{p_\alpha}}\Big\{\Big[-\frac{i}{\omega_1}\cdot$$

$$\cdot div\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]\cdot\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2 - \frac{1}{\omega_1} div\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\right]\cdot\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}$$

$$+ div\left[\frac{\partial}{\partial\omega_1}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\omega_1}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\right]\cdot\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2 + \frac{i}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\right]\cdot$$

$$\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 - \frac{1}{\omega_2} div\left[\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\right]\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} + div\Big[$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega_2}\left(\frac{\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\omega_2}\right)\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\Big]\cdot\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\Big]\times\underset{\sim}{B}^\circ\Big\}\left\langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\right\rangle + c.c.$$

$$-\frac{\pi}{\omega^2_{p_\alpha}}\Big\{\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2 - i\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\cdot\nabla\right)\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}$$

$$+ i\left(\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2 + \left(\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1$$

$$+ i\left(\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}^*_2\cdot\nabla\right)\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial\omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} - i\left(\frac{\partial\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)}{\partial\omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}^*_2}{\partial t}\cdot\nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\Big\}\cdot$$

$$\cdot\left\langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\right\rangle + c.c. + \frac{i}{4}\Big\{\frac{1}{\omega_2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1\times rot\,\underset{\sim}{E}^*_2 +$$

$$+\frac{i}{\omega_2^2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} + \frac{i}{\omega_2}\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)}{\partial \omega_1}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t} \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_2^*$$

$$-\frac{1}{\omega_1}\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2^* \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_1 + \frac{i}{\omega_1^2}\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2^* \times \mathrm{rot}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_1}{\partial t}$$

$$+\frac{i}{\omega_1}\frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega_2)}{\partial \omega_2}\frac{\partial \underset{\sim}{E}_2^*}{\partial t} \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_1 \Big\} \cdot$$

$$\cdot \langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t] \rangle + \mathrm{c.c.} \qquad (88)$$

où $\underset{\sim}{f}_\alpha$ est donné par (72).

$\underset{\sim}{F}_\alpha$ est la force pondéromotrice agissant sur une particule chargée α, due au champ électromagnétique composé de deux ondes dont les fréquences sont différentes. On remarque ici l'apparition de termes mixtes, exprimant l'interaction non linéaire de ces deux ondes.

CHAPITRE III

ÉQUATIONS MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUES DU PLASMA.

Jusqu'à maintenant on a considéré le plasma comme étant formé de deux fluides différents. Maintenant on va combiner les équations fluides pour les différentes espèces de particules, en présence des champs H.F., pour arriver à un système d'équations qui décrit la réponse macroscopique du plasma considéré comme un seul fluide.

Commençons par le cas de deux fréquences séparées. On définit les équations:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{J} &= e\left(\langle n_i\rangle \underset{\sim}{u}_i - \langle n_e\rangle \underset{\sim}{u}_e\right), \\ \underset{\sim}{j} &= \underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i} \end{aligned}\right\} \qquad (89)$$

où j_α et u_α sont définis dans (58) et (62). J est la valeur moyenne du courant d'induction, j est le courant de magnétisation.

Des relations suivantes:

$$\frac{i\omega}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[(\hat{\epsilon}^* - \hat{I})\underset{\sim}{E}^* \times (\hat{\epsilon} - \hat{I})\underset{\sim}{E}\right] = -\frac{m_\alpha c}{\rho_\alpha}\frac{\partial \epsilon_{iK}}{\partial \underset{\sim}{B}}E_i^* E_K \ ,$$

$$\hat{\epsilon} - \hat{I} = \frac{4\pi i}{\omega}\hat{\sigma} \ .$$

et de l'équation (58) on trouve:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{j}_{1\alpha} &= \frac{c}{16\pi}\,\mathrm{rot}\left[\frac{\partial \epsilon_{ik}(\omega_1)}{\partial \underset{\sim}{B}^{0}} E^{*}_{1i} E_{1k}\right], \\ \underset{\sim}{j}_{2\alpha} &= \frac{c}{16\pi}\,\mathrm{rot}\left[\frac{\partial \epsilon_{ik}(\omega_2)}{\partial \underset{\sim}{B}^{0}} \underset{\sim}{E}^{*}_{2i} E_{2k}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

et de (89) et (90):

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{j} &= c\,\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{M}_1 + c\,\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{M}_2 \\ &= c\,\mathrm{rot}\,\underset{\sim}{M} \end{aligned} \tag{91}$$

où

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{M}_1 &= \frac{1}{16\pi}\frac{\partial \epsilon_{ik}(\omega_1)}{\partial \underset{\sim}{B}^{0}} E^{*}_{1i} E_{1k} \\ \underset{\sim}{M}_2 &= \frac{1}{16\pi}\frac{\partial \epsilon_{ik}(\omega_2)}{\partial \underset{\sim}{B}^{0}} \underset{\sim}{E}^{*}_{2i} E_{2k} \\ \underset{\sim}{M} &= \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2 \end{aligned} \tag{92}$$

$\underset{\sim}{j}$ est un vecteur solenoïdal, et $\underset{\sim}{M}$ est la densité du moment magnétique dans le plasma, induit par le champ H.F.

On définit:

$$\underset{\sim}{H}^{0} = \underset{\sim}{B}^{0} - 4\pi\left(\underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2\right) \tag{93}$$

et des équations (67), (89), (91) et (92) on trouve:

$$\mathrm{rot}\, \underset{\sim}{H}^{\circ} = \frac{4\pi}{c} \underset{\sim}{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \langle \underset{\sim}{E} \rangle}{\partial t} \tag{94}$$

$\underset{\sim}{H}^{o}$ est le vecteur de la moyenne de l'intensité du champ magnétique qui, en présence du champ H.F., ne coincide pas avec le vecteur de la moyenne du champ magnétique induit $\underset{\sim}{B}^{o}$.

A présent cherchons les équations hydrodynamiques du plasma entier, "un seul fluide hydrodynamique".

On définit la densité du plasma ρ et la vitesse u comme suit:

$$\left.\begin{aligned} &\rho = m_e \langle n_e \rangle + m_i \langle n_i \rangle , \\ &\underset{\sim}{u} = \left(m_i \langle n_i \rangle \underset{\sim}{u}_i + m_e \langle n_e \rangle \underset{\sim}{u}_e \right) / \rho . \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

si on fait la sommation de l'équation (66) pour α = e,i, on trouve:

$$m_i \frac{\partial \langle n_i \rangle}{\partial t} + m_e \frac{\partial \langle n_e \rangle}{\partial t} + \mathrm{div} \left[m_i \langle n_i \rangle \underset{\sim}{u}_i + m_e \langle n_e \rangle \underset{\sim}{u}_e \right] = 0$$

ou:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div} (\rho \underset{\sim}{u}) = 0 \tag{96}$$

Cette équation représente l'équation de continuité du plasma.

Pour obtenir une équation en $\frac{d\underset{\sim}{u}}{dt}$, on suppose la condition de quasi-neutralité:

$$\langle n_e \rangle \approx \langle n_i \rangle \approx n = \rho/(m_e + m_i) \tag{97}$$

et on considère le courant de déplacement moyen $c^{-1}\frac{\partial\langle\underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle}{\partial t}$ négligeable.

Les équations (93) et (94) donnent alors:

$$\underset{\sim}{J} = \frac{c}{4\pi}\, \mathrm{rot}\left[\underset{\sim}{B}^{\circ} - 4\pi(\underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2)\right]. \tag{98}$$

Maintenant, en faisant la sommation de l'équation (64) pour $\alpha = e, i$, en utilisant (97) et (98), et en considérant que les termes d'ordre u^2 sont de l'ordre de $|E|^4$ et par conséquent négligeables, on obtient:

$$m_i\langle n_i\rangle \frac{\partial \underset{\sim}{u}_i}{\partial t} + m_e\langle n_e\rangle\frac{\partial \underset{\sim}{u}_e}{\partial t} =$$

$$= e_i\langle n_i\rangle\left\{\langle\underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \frac{1}{c}\underset{\sim}{u}_i \times \underset{\sim}{B}^{\circ}\right\} + \underset{\sim}{f}_i$$

$$+ e_e\langle n_e\rangle\left\{\langle\underset{\sim}{\mathcal{E}}\rangle + \frac{1}{c}\underset{\sim}{u}_e \times \underset{\sim}{B}^{\circ}\right\} + \underset{\sim}{f}_e$$

D'après (95), (97) et (89) on trouve:

$$\rho\frac{d\underset{\sim}{u}}{dt} = \frac{1}{c}\underset{\sim}{J}\times\underset{\sim}{B}^{\circ} + \underset{\sim}{f}_i + \underset{\sim}{f}_e \tag{99}$$

où, avec les équations (91) et (98) on peut écrire:

$$\rho \frac{d\underset{\sim}{u}}{dt} = \frac{1}{4\pi} (\mathrm{rot}\, \underset{\sim}{B}^{o}) \times \underset{\sim}{B}^{o} + \underset{\sim}{f} \tag{100}$$

où

$$\underset{\sim}{f} = -\frac{1}{c} \underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{B}^{o} + \underset{\sim}{f}_{i} + \underset{\sim}{f}_{e} \tag{101}$$

$\underset{\sim}{f}_{\alpha}$ est donné par (72).

Les équations (96) et (97), doivent être complétées par l'équation du champ magnétique d'induction moyen. Pour ce faire, on doit négliger l'inertie de l'électron dans (64), on obtient alors:

$$\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle = -\frac{1}{c} \underset{\sim}{u}_{e} \times \underset{\sim}{B}^{o} + \frac{\underset{\sim}{f}_{e}}{e\langle n_e \rangle} \tag{102}$$

De (89) et (95) on peut conclure que:

$$\underset{\sim}{u} \approx \frac{\underset{\sim}{J}}{en} + \underset{\sim}{u}_{e} \tag{103}$$

où on a considéré $m_e \ll m_i$ et $\langle n_e \rangle \approx \langle n_i \rangle = n$,

donc l'équation (102) sera:

$$\langle \underset{\sim}{\mathcal{E}} \rangle \approx -\frac{1}{c} \underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{B}^{o} + \frac{1}{enc} \underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{B}^{o} + \underset{\sim}{f}_{e} \tag{104}$$

En substituant l'équation (104) dans l'équation (28), on trouve:

$$\text{rot} \langle \underset{\sim}{E} \rangle \approx -\frac{1}{c} \text{rot} [\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{B}^{\circ}] + \frac{1}{enc} \text{rot} [\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{B}^{\circ}] + \text{rot} \left(\frac{\underset{\sim}{p}_e}{en} \right) . \quad (105)$$

l'équation (105) et l'équation (28) donnent:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{B}^{\circ}}{\partial t} = \text{rot} [\underset{\sim}{u} \times \underset{\sim}{B}^{\circ}] . \quad (106)$$

Où on a négligé les termes d'ordre λ^2, (i.e. dérivée seconde).

Les équations (96), (100) et (106) avec les équations définissant l'amplitude $\underset{\sim}{E}$, constituent un système complet d'équations pour un plasma magnétisé dans un champ H.F..

A présent, on va généraliser ce travail en considérant l'effet des fréquences de battement; pour ce faire on doit retourner à l'équation (73):

$$\langle \tilde{n}_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \rangle = \langle \tilde{n}_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \rangle_{I} + \langle \tilde{n}_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \rangle_{II}$$

On avait écrit:

$$\langle \tilde{n}_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \rangle_{I} = \frac{\underset{\sim}{j}_{1\alpha}}{e_{\alpha}} + \frac{\underset{\sim}{j}_{2\alpha}}{e_{\alpha}} + \underset{\sim}{\Gamma}_{1\alpha} + \underset{\sim}{\Gamma}_{2\alpha} .$$

où $\underset{\sim}{j}_{\alpha}$ et $\underset{\sim}{\Gamma}_{\alpha}$ sont définis dans (58) et (59) respectivement et $\langle \tilde{n}_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \rangle_{II}$ est donné dans (75).

Dans ce cas, la valeur moyenne du courant d'induction $\underset{\sim}{J}$, et le courant de magnétisation $\underset{\sim}{j}$, qui sont définis dans (89), seront:

$$\underset{\sim}{J} = e\left(\langle n_i \rangle \underset{\sim}{U}_i - \langle n_e \rangle \underset{\sim}{U}_e\right), \tag{107}$$

$$\underset{\sim}{j} = \underset{\sim}{j}_{1e} + \underset{\sim}{j}_{2e} + \underset{\sim}{j}_{1i} + \underset{\sim}{j}_{2i} + (\underset{\sim}{j}_\alpha)_{II} \tag{108}$$

où $\underset{\sim}{U}_\alpha$ est donné par (78), $j_{1,2\alpha}$ est donné par (58). $(j_\alpha)_{II}$ est la partie du courant de magnétisation qui provient de $\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle_{II}$.

Pour trouver $(j_\alpha)_{II}$, il faut séparer $\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle$ en deux parties, comme on l'a déjà fait pour $\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle_I$. Mais on sait que $\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle_{II}$ est donné par des termes mixtes, donc pour simplifier nos calculs on va supposer que les deux ondes ont la même amplitude et la même fréquence ($\underset{\sim}{E}$ et w).

De (75) on trouve:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle_{II} = \frac{2\pi}{m_\alpha \omega_{p_\alpha}^2} \Big\{ & \frac{i}{\omega} \hat{\sigma}_\alpha(\omega) \underset{\sim}{E}\, \mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha^*(\omega) \underset{\sim}{E}^*\right] + \mathrm{c.c.} \\
& - \frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega)}{\partial \omega} \frac{\partial \underset{\sim}{E}^*}{\partial t} \mathrm{div}\left[\hat{\sigma}_\alpha(\omega) \underset{\sim}{E}\right] + \mathrm{c.c.} \\
& + \hat{\sigma}_\alpha^*(\omega) \underset{\sim}{E}^* \mathrm{div}\left[\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\hat{\sigma}_\alpha(\omega)}{\omega}\right) \frac{\partial \underset{\sim}{E}}{\partial t}\right] + \mathrm{c.c.} \Big\}.
\end{aligned} \tag{109}$$

D'après (55), (58) et (59) on arrive à:

$$\langle \tilde{n}_\alpha \tilde{v}_\alpha \rangle_{II} = 2 \frac{\underset{\sim}{j}_\alpha}{e_\alpha} + 2 \underset{\sim}{\Gamma}_\alpha \tag{110}$$

où $\quad \mathbf{j}_{1\alpha} = \mathbf{j}_{2\alpha} = \mathbf{j}_{\alpha} \; , \; \mathbf{\Gamma}_{1\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{2\alpha} = \mathbf{\Gamma}_{\alpha}$

Donc
$$\left(\mathbf{j}_{\alpha} \right)_{II} = 2\, \mathbf{j}_{\alpha} \tag{111}$$

et l'équation (108) devient:

$$\mathbf{j} = 4\, \mathbf{j}_{\alpha} \tag{112}$$

De (90) et (92) on peut écrire:

$$\mathbf{j}_{\alpha} = c \,\mathrm{rot}\, \mathbf{M} \tag{113}$$

où
$$\mathbf{M} = \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \epsilon_{iK}(\omega)}{\partial \mathbf{B}^{0}} E_i^{*} E_K \; .$$

donc (112) devient:

$$\mathbf{j} = c \,\mathrm{rot}\, (4 \mathbf{M}) \; . \tag{114}$$

D'après l'équation (94) on trouve que le vecteur de la moyenne de l'intensitée du champ magnétique, en présence du champ H.F., est:

$$\mathbf{H}^{0} = \mathbf{B}^{0} - 16 \pi \mathbf{M} \tag{115}$$

Si on prend la même approximation qu'au premier cas de ce chapitre, les équations (96), (100) et (106) deviennent:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho \underset{\sim}{U}) = 0 \,. \tag{116}$$

$$\rho \frac{d\underset{\sim}{U}}{dt} = \frac{1}{4\pi}(rot\, \underset{\sim}{B}^{\circ}) \times \underset{\sim}{B}^{\circ} + \underset{\sim}{F} \,; \tag{117}$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{B}^{\circ}}{\partial t} = rot\,[\underset{\sim}{U} \times \underset{\sim}{B}^{\circ}] \,. \tag{118}$$

où

$$\rho = m_e \langle n_e \rangle + m_i \langle n_i \rangle \,; \tag{119}$$

$$\underset{\sim}{U} = (m_i \langle n_i \rangle \underset{\sim}{U}_i + m_e \langle n_e \rangle \underset{\sim}{U}_e)/\rho \,. \tag{120}$$

$$\underset{\sim}{F} = -\frac{1}{c}\underset{\sim}{J} \times \underset{\sim}{B}^{\circ} + \underset{\sim}{F}_i + \underset{\sim}{F}_e \,. \tag{121}$$

$\underset{\sim}{U}_\alpha$ et $\underset{\sim}{F}_\alpha$ sont donnés dans (78) et (86), respectivement, avec:

$\underset{\sim}{E}_1 \approx \underset{\sim}{E}_2 = \underset{\sim}{E}$ et $w_1 \approx w_2 = w$.

CHAPITRE IV

APPLICATION

A titre d'exemple, nous allons étudier la force pondéromotrice pour un cas expérimental type. On considère les hypothèses suivantes. Les champs H.F. sont stationnaires, c'est-à-dire d'amplitude constante dans le temps. Et les deux ondes sont quasi-planes et perpendiculaires au champ magnétique $\underset{\sim}{B}^{o}$.

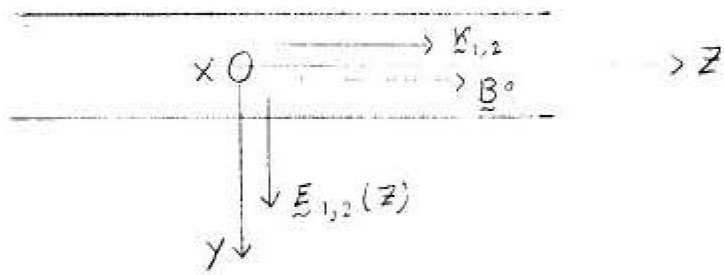
On peut donc supposer que les amplitudes des champs électriques sont de la forme suivante:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{E}_1(r) &= \underset{\sim}{A}_1(\underset{\sim}{r}) \exp(i\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{r}) \\ \underset{\sim}{E}_2(r) &= \underset{\sim}{A}_2(\underset{\sim}{r}) \exp(i\underset{\sim}{K}\cdot\underset{\sim}{r}) \end{aligned}\right\} \qquad (122)$$

Soit $\underset{\sim}{B}^{o} = B^{o}\vec{Z}$, où B^{o} = const., et soient $\underset{\sim}{A}_1$ et $\underset{\sim}{A}_2$ dirigés suivant l'axe des y, fonctions de la variable Z. Supposons de plus que $\underset{\sim}{K}_1$ et $\underset{\sim}{K}_2$ sont parallèles à l'axe des Z. Les équations (122) deviennent alors:

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{E}_1(z) &= A_1(z) \exp(iK_1 z)\ \vec{Y} \\ \underset{\sim}{E}_2(z) &= A_2(z) \exp(iK_2 z)\ \vec{Y} \end{aligned}\right\} \qquad (123)$$

ici, $\vec{x}$, $\vec{y}$ et $\vec{z}$ sont les vecteurs unitaires du système d'axes X, Y, Z.



Ainsi, on obtient les relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&E_{1x} = E_{1Z} = 0 \quad , \quad E_{2x} = E_{2Z} = 0 \, . \\
&E_{1y} = A_1(Z)\exp(iK_1 \cdot Z) \, . \\
&E_{2y} = A_2(Z)\exp(iK_2 \cdot Z) \, . \\
\text{et} \quad &\frac{\partial E_{1y}}{\partial x} = \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} = 0 \, . \\
&\frac{\partial E_{2y}}{\partial x} = \frac{\partial E_{2y}}{\partial y} = 0 \, . \\
&\frac{\partial E_{1y}}{\partial Z} \neq 0 \, , \quad \frac{\partial E_{2y}}{\partial Z} \neq 0 \, .
\end{aligned}\right\} \qquad (124)$$

De (124) on peut écrire:

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 = \sigma_{\alpha 12}(\omega_1) E_{1y}\vec{X} + \sigma_{\alpha 22}(\omega_1) E_{1y}\vec{Y} \\
&\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}^*_1 = \sigma^*_{\alpha 12}(\omega_1) E^*_{1y}\vec{X} + \sigma^*_{\alpha 22}(\omega_1) E^*_{1y}\vec{Y}
\end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

et on peut en déduire facilement que:

$$\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1^* = 0 \tag{126}$$

et:

$$\left.\begin{aligned}\left(\hat{\sigma}_\alpha(\omega_l)\underset{\sim}{E}_l \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_m)\underset{\sim}{E}_m^* &= 0\,, \\ \left(\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_l)\underset{\sim}{E}_l^* \cdot \nabla\right)\hat{\sigma}_\alpha(\omega_m)\underset{\sim}{E}_m &= 0\,.\end{aligned}\right\} \tag{127}$$

où l, m = 1, 2, sans faire de sommations sur l et m.

L'équation (88), combinée aux équations (124) et (127), donne:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{F}_\alpha = {} & \frac{i}{4\omega_1}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_1^* + c.c. \\ & + \frac{i}{4\omega_2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2 \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_2^* + c.c. \\ & + \frac{i}{4}\left\{\frac{1}{\omega_2}\hat{\sigma}_\alpha(\omega_1)\underset{\sim}{E}_1 \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_2^*\right. \\ & \qquad \left. - \frac{1}{\omega_1}\hat{\sigma}^*_\alpha(\omega_2)\underset{\sim}{E}_2^* \times \mathrm{rot}\,\underset{\sim}{E}_1\right\} \cdot \langle \exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\rangle + c.c.\end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{F}_\alpha = {} & \left\{\frac{i}{4\omega_1}\sigma_{\alpha zz}(\omega_1)\frac{\partial}{\partial z}E_{1y}^* E_{1y}\right. \\ & \left. + \frac{i}{4\omega_2}\sigma_{\alpha zz}(\omega_2)\frac{\partial}{\partial z}E_{2y}^* E_{2y}\right\} \cdot \vec{z} \; +\end{aligned}$$

$$-\left\{\left[\frac{i}{4\omega_2}\sigma_{\alpha\,22}(\omega_1)E_{1y}\frac{\partial}{\partial Z}E_{2y}^{*}\right.\right.$$

$$\left.-\frac{i}{4\omega_1}\sigma_{\alpha\,22}^{*}(\omega_2)E_{2y}^{*}\frac{\partial}{\partial Z}E_{1y}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot\langle\exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\rangle+c.c.\right\}\vec{Z} \tag{128}$$

mais d'après (47) on a:

$$\sigma_{\alpha\,22}(\omega)=\frac{i\omega}{4\pi}\;\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega^{2}-\Omega_{\alpha}^{2}}=-\sigma_{\alpha\,22}^{*}(\omega)$$

d'où:

$$\underset{\sim}{F}_{\alpha}=-\frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega_1^{2}-\Omega_{\alpha}^{2}}\frac{\partial}{\partial Z}E_{1y}^{*}E_{1y}+\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega_2^{2}-\Omega_{\alpha}^{2}}\frac{\partial}{\partial Z}E_{2y}^{*}E_{2y}\right\}\vec{Z}$$

$$-\frac{1}{16\pi}\left\{\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega_1^{2}-\Omega_{\alpha}^{2}}E_{1y}\frac{\partial}{\partial Z}E_{2y}^{*}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{\omega_2^{2}-\Omega_{\alpha}^{2}}E_{2y}^{*}\frac{\partial}{\partial Z}E_{1y}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\langle\exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\rangle+c.c.\right\}\vec{Z} \tag{129}$$

Cette équation représente la forme finale de la force pondéromotrice dans l'hypothèse mentionnée au début de ce chapitre.

Soit maintenant le champ magnétique $\underset{\sim}{B}^{o}$ très faible, c'est-à-dire tel que $w_1^{2}\gg\Omega_{\alpha}^{2}$ et $w_2^{2}\gg\Omega_{\alpha}^{2}$. De l'équation (129) on trouve:

$$\underset{\sim}{F}_{\alpha}=-\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{16\pi}\left\{\frac{1}{\omega_1^{2}}\frac{\partial}{\partial Z}E_{1y}^{*}E_{1y}+\frac{1}{\omega_2^{2}}\frac{\partial}{\partial Z}E_{2y}^{*}E_{2y}\right\}\vec{Z}$$

$$-\frac{\omega_{p\alpha}^{2}}{16\pi}\left\{\frac{1}{\omega_1\omega_2}\left[E_{1y}\frac{\partial}{\partial Z}E_{2y}^{*}+E_{2y}^{*}\frac{\partial}{\partial Z}E_{1y}\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\langle\exp[-i(\omega_1-\omega_2)t]\rangle+c.c.\right\}\vec{Z} \tag{130}$$

Si on prend $w_1 \approx w_2 = w$ et $\underset{\sim}{E}_1 \approx \underset{\sim}{E}_2 = \underset{\sim}{E}$ l'équation (130) devient:

$$F_\alpha = -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial Z}|E_y|^2 \cdot \vec{Z} \tag{131}$$

et on remarque que la force pondéromotrice due a une seule onde a la forme suivante:

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = -\frac{1}{16\pi}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial Z}|E_y|^2 \cdot \vec{Z} \tag{132}$$

Cette équation peut s'écrire d'une façon plus générale [4- équation (1)]:

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = -\frac{1}{16\pi}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\nabla|\underset{\sim}{E}|^2 .$$

On en déduit pour le cas de deux ondes de même fréquence et de même amplitude:

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = -\frac{1}{16\pi}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\nabla|\underset{\sim}{E}+\underset{\sim}{E}|^2$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\nabla|\underset{\sim}{E}|^2 .$$

ce qui correspond bien au résultat trouvé en (131).

De l'équation (58), avec (104), on trouve que le courant de magnétisation est parallèle à l'axe Z, ce qui donne:

$$\underset{\sim}{j} \times \underset{\sim}{B}^{o} = 0 \tag{133}$$

donc la force $\underset{\sim}{F}$ dans l'équation (121) sera:

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_{\alpha} \, . \tag{134}$$

CONCLUSION

Dans ce travail nous avons mis en évidence pour la première fois l'expression de la force pondéromotrice due à l'interaction de deux ondes électromagnétiques. Ainsi, nous avons montré au deuxième chapitre que cette force a la forme suivante.

$$\underset{\sim}{F}_\alpha = \underset{\sim}{f}_{1\alpha} + \underset{\sim}{f}_{2\alpha} + \underset{\sim}{f}_{(1,2)\alpha}$$

Les deux premiers termes sont dus à l'effet de chacune des deux ondes, le troisième terme illustre la contribution de l'interaction non linéaire des deux ondes. Ce dernier contribue à l'excitation des modes de battement $(w_1 - w_2)$ dans un plasma soumis à deux ondes électromagnétiques de forte puissance.

En ce qui concerne le courant de magnétisation et le moment magnétique, on a vu au troisième chapitre que la présence de deux ondes dans le champ électromagnétique H.F. nous a conduit aussi a trois composantes pour chacun, les deux premières résultent de l'effet de chaque onde prise séparément, et la troisième résulte de leur effet combiné.

APPENDICE I

Ici on va calculer quelques relations utilisées dans le premier chapitre.

A partir de (47) du chapitre 1, on peut écrire:

$$\hat{\sigma}_\alpha(\omega)\underset{\sim}{E} = \frac{i\omega}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2} & i\frac{\Omega_\alpha}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2} & 0 \\ -i\frac{\Omega_\alpha}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2} & \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

ce qui donne:

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_x = \frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_x + i\frac{\Omega_\alpha}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_y\right), \tag{2}$$

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_y = \frac{i\omega}{4\pi}\left(-i\frac{\Omega}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_x + \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_y\right), \tag{3}$$

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_z = \frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}E_z\right) \tag{4}$$

De la même manière on trouve:

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right]_x = \frac{-i\omega}{4\pi}\left(\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_x^* - i\frac{\Omega}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_y^*\right), \tag{5}$$

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right]_y = \frac{-i\omega}{4\pi}\left(i\frac{\Omega}{\omega}\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_x^* + \frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2-\Omega_\alpha^2}E_y^*\right), \tag{6}$$

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right]_z = -\frac{i\omega}{4\pi}\left(\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2} E_z^*\right). \tag{7}$$

et de (4) et (7) on trouve:

$$\frac{i}{\omega} E_z = \frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_z ; \tag{8}$$

$$-\frac{i}{\omega} E_z^* = \frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right]_z . \tag{9}$$

Soit la notation suivante:

$$\left[\quad\right]_\perp \equiv \left[\quad\right]_x + i\left[\quad\right]_y \tag{10}$$

Les équations (3) et (4) donnent:

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_\perp = \frac{i\omega_{p_\alpha}^2}{4\pi}\,\frac{1}{\omega-\Omega_\alpha} E_\perp$$

ou

$$\frac{i}{\omega-\Omega_\alpha} E_\perp = \frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha \underset{\sim}{E}\right]_\perp \tag{11}$$

et de (5) et (6) on trouve:

$$\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}\right]_\perp = \frac{-i}{4\pi}\,\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega+\Omega_\alpha} E_\perp^*$$

ou

$$\frac{-i}{\omega+\Omega_\alpha} E_\perp^* = \frac{4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\hat{\sigma}_\alpha^* \underset{\sim}{E}^*\right]_\perp \tag{12}$$

De (1) on peut trouver:

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]_x = \frac{i}{4\pi}\,\omega_{p_\alpha}^2\left[-\frac{\omega^2+\Omega_\alpha^2}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - i\frac{2\omega\Omega_\alpha}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\right], \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]_y = \frac{i}{4\pi}\,\omega_{p_\alpha}^2\left[i\frac{2\omega\Omega_\alpha}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} - \frac{\omega^2-\Omega_\alpha^2}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\right], \quad (14)$$

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]_z = -\frac{i}{4\pi}\,\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\,\frac{\partial E_z}{\partial t} \;; \quad (15)$$

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha^*}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial t}\right]_x = \frac{-i}{4\pi}\,\omega_{p_\alpha}^2\left[-\frac{\omega^2+\Omega_\alpha^2}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_x^*}{\partial t} + i\frac{2\omega\Omega_\alpha}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_y^*}{\partial t}\right], \quad (16)$$

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha^*}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial t}\right]_y = \frac{-i}{4\pi}\,\omega_{p_\alpha}^2\left[-i\frac{2\omega\Omega_\alpha}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_x^*}{\partial t} - \frac{\omega^2+\Omega_\alpha^2}{(\omega^2-\Omega_\alpha^2)^2}\frac{\partial E_y^*}{\partial t}\right], \quad (17)$$

$$\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha^*}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial t}\right]_z = \frac{i}{4\pi}\,\frac{\omega_{p_\alpha}^2}{\omega^2}\,\frac{\partial E_z^*}{\partial t}\,. \quad (18)$$

et de (16) et (18):

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]_z \;; \quad (19)$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial E_z^*}{\partial t} = \frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha^*}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial t}\right]_z\,. \quad (20)$$

De (13) et (14), (16) et (17), avec l'aide de (10), on arrive à :

$$\frac{1}{(\omega-\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_\perp}{\partial t} = \frac{i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}}{\partial t}\right]_\perp \;; \quad (21)$$

$$\frac{1}{(\omega+\Omega_\alpha)^2}\frac{\partial E_\perp^*}{\partial t} = \frac{-i4\pi}{\omega_{p_\alpha}^2}\left[\frac{\partial\hat{\sigma}_\alpha^*}{\partial\omega}\frac{\partial\underline{E}^*}{\partial t}\right]_\perp\,. \quad (22)$$

APPENDICE II

Nous avons défini dans le premier chapitre la moyenne temporelle d'une fonction $\tilde{A}(t)$;

$$\langle \tilde{A}(t) \rangle = \frac{1}{t_0} \int_t^{t+t_0} \tilde{A}(t')\, dt' . \tag{1}$$

Explicitons l'intervalle de temps t_0 et calculons la valeur moyenne des termes qui sot fonction quadratique des variations rapides dans les équations des mouvement lents

Des équations (50), (53) et (54), du premier chapitre, on peut écrire les quantités rapides de la façon suivante:

$$\begin{aligned}\tilde{A}(\underset{\sim}{r},t) = {} & \underset{\sim}{A}_1(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{-i\omega_1 t} + \underset{\sim}{A}_1^*(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{i\omega_1 t} \\ & + \underset{\sim}{A}_2(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{-i\omega_2 t} + \underset{\sim}{A}_2^*(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{i\omega_2 t},\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\underset{\sim}{r},t) = {} & \underset{\sim}{B}_1(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{-i\omega_1 t} + \underset{\sim}{B}_1^*(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{i\omega_1 t} \\ & + \underset{\sim}{B}_2(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{-i\omega_2 t} + \underset{\sim}{B}_2^*(\underset{\sim}{r},\lambda t)\, e^{i\omega_2 t}.\end{aligned} \tag{3}$$

Effectuons leur produit:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}\cdot\tilde{B} = {} & \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1^* + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2^* + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_2^* \, e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2^* \underset{\sim}{B}_1 \, e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1 \, e^{-2i\omega_1 t} + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2 \, e^{-2i\omega_2 t} + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_2 \, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_1 \, e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + c.c.
\end{aligned}
$$

Dans cette équation on trouve des termes oscillant rapidement; et les périodes associées aux oscillations rapides de ces termes sont:

$$
\frac{\pi}{\omega_1}\,,\quad \frac{\pi}{\omega_2}\,,\quad \frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\,,\quad \frac{2\pi}{|\omega_1-\omega_2|}\,.
$$

Pour calculer les valeurs moyennes et pour tenir compte de tous ces termes, il faut prendre la période temporelle t_o grande comparée à ces périodes, et bien sûr petite par rapport au temps t_s des variations lentes.

Donc la valeur moyenne de l'équation (4) est:

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{A}\cdot\tilde{B} \rangle = {} & \underset{\sim}{A}_1 \cdot \underset{\sim}{B}_1^* + \underset{\sim}{A}_2 \cdot \underset{\sim}{B}_2^* + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_2^* \langle e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2^* \underset{\sim}{B}_1 \langle e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1 \langle e^{-2i\omega_1 t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2 \langle e^{-2i\omega_2 t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_2 \langle e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_1 \langle e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} \rangle + c.c. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Dans notre travail, nous avons considéré seulement les effets de battement. Pour ce faire nous avons négligé les termes qui dépendent de $\langle e^{\pm i2\omega_{1,2}t} \rangle$ et de $\langle e^{\pm i(\omega_1+\omega_2)t} \rangle$. Donc la valeur moyenne dans l'équation (5) pourra s'écrire:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A}\cdot\hat{B} \rangle \approx {} & \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_1^* + \underset{\sim}{A}_2 \underset{\sim}{B}_2^* + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_1 \underset{\sim}{B}_2^* \langle e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \rangle + c.c. \\
& + \underset{\sim}{A}_2^* \underset{\sim}{B}_1 \langle e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \rangle + c.c. \qquad (6)
\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

1. V.I. KARPMAN and A.G. SHAGALOV, J. Plasma Physics (1982), 27, 2, 215-224.

2. D.D. TSKHAKAYA, J. Plasma Phys. (1981), 25, 2, 233-238.

3. L.M. GORBUNOV , Sov. Phys. - USP., 16, no. 2, 217, (1973).

4. H. WASHIMI and V.I. KARPMAN, Sov. Phys. JETP, 44, 3, 528-531, (1976).

5. R. KLIMA, Czech. J. Phys., B18, 1280-1290, (1968).

6. R. KLIMA, Sov. Phys. JETP, 26, 3, 535-536, (1968).

7. R. KLIMA, V.A. PETRZILKA, Czech. J. Phys. B18, 1292-1298, (1968).

8. J. TEICHMANN, Nuclear Fusion, 5, 107-120, (1965).

9. L.P. PITAEVSKII, Sov. Phys. JETP, 12, 5, 1008-1013, (1961).

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le Dr. J. Teichmann d'avoir accepté ce mémoire, ainsi que son appui tout au long de la rédaction.

Je remercie également les gens du groupe de physique de plasma pour les discussions que nous avons eues ensemble et les remarques pertinentes qu'ils m'ont apportées.